Théorème : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$ dont les racines complexes sont de module ≤ 1. On suppose que $P(0) \neq 0$.
Alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

Étape 1 : Soit $z_1, \dots, z_n$ les racines de P. Alors d'après les relations coefficients-racines :

$$P = (X - z_1) \cdots (X - z_n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \sigma_{n-j}(z_1, \dots, z_n) X^j \quad \text{où} \quad \sigma_j(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_j}$$

Puisque $P \in \mathbb{Z}[X]$, $\forall 1 \leq j \leq n$, $\sigma_j(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}$.

On a $|\sigma_j(z_1, \dots, z_n)| \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \prod_{j=1}^{n} |z_{i_j}| \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} 1 = \binom{n}{j}$

Ainsi, $\mathcal{Q}_n := \{ Q \in \mathbb{Z}[X] ;\ Q \text{ unitaire de degré } n,\ Q(0) \neq 0,\ \bigcup_{Q(z)=0} z \subset \overline{D(0,1)} \}$ est fini.

Étape 2 : Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_k = (X - z_1^k) \cdots (X - z_n^k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \sigma_{n-j}(z_1^k, \dots, z_n^k) X^j$.
Montrons que $P_k \in \mathcal{Q}_n$. On a bien P_k est unitaire et $\forall 1 \leq j \leq n$, $|z_j^k| \leq 1$.
Montrons que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors $(-1)^{n-j} \sigma_{n-j}(z_1^k, \dots, z_n^k) = (-1)^{n-j} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-j} \leq n} z_{i_1}^k \cdots z_{i_{n-j}}^k$ est un polynôme symétrique en $z_1, \dots, z_n$.
Par le théorème de structure des polynômes symétriques, $\exists Q_{n-j} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ tel que

$$(-1)^{n-j} \sigma_{n-j}(z_1^k, \dots, z_n^k) = Q_{n-j}\big(\underbrace{\sigma_1(z_1, \dots, z_n)}_{\in \mathbb{Z}}, \dots, \underbrace{\sigma_n(z_1, \dots, z_n)}_{\in \mathbb{Z}}\big) \in \mathbb{Z}$$

D'où, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P_k \in \mathbb{Z}[X]$ et $P_k \in \mathcal{Q}_n$.

Étape 3 : Puisque $\mathcal{Q}_n$ est fini, $A := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_n} \bigcup_{Q(z)=0} z$ est aussi fini ($|\bigcup_{Q(z)=0} z| \leq \deg Q = n$). Or, $\forall 1 \leq i \leq n$, $\{ z_i^k ;\ k \in \mathbb{N}^* \} \subset A$ qui est fini (on note z_i^k racine de P_k).
Donc, par le principe des tiroirs, $\exists l \neq j$ tels que $z_i^l = z_i^j$. Si $l < j$, puisque $z_i \neq 0$, on a $z_i^{j-l} = 1$ i.e. z_i est une racine de l'unité.

Corollaire : Si de plus P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors P est un polynôme cyclotomique.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $z_1^k = 1$. On écrit $X^k - 1 = \prod_{d \mid k} \Phi_d$.
Puisque z_1 est racine de $X^k - 1$, $\exists d \mid k$ tel que $\Phi_d(z_1) = 0$ (d est l'ordre de z_1 dans $\mathbb{U}_k$). Or, puisque Φ_d est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, Φ_d est le polynôme minimale de z_1. Puisque $P \in \mathbb{Q}[X]$ annule z_1, $\Phi_d \mid P$. Or, P est irréductible et P, Φ_d sont unitaires donc $P = \Phi_d$.

Remarque : Si on autorise $P(0) = 0$, alors $X \mid P$ et $P = X$ par irréductibilité.